Tema 1.2

Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale (şiruri)

1. Şiruri

Definiție. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este *monoton (strict) crescător* dacă $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n < x_{n+1})$, $\forall n \geq 1$.

Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este *monoton (strict) descrescător* dacă $x_n \geq x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$, $\forall n \geq 1$.

Definiție. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este *mărginit inferior* dacă există un număr real (notat cu) m astfel încât $m \leq x_n$, $\forall n \geq 1$.

Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este *mărginit superior* dacă există un număr real (notat cu) M astfel încât $x_n \leq M$, $\forall n \geq 1$.

Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit atât inferior cât şi superior, spunem că şirul este *mărginit*.

2. Progresii aritmetice

Definiție. Şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este o *progresie aritmetică de rație* r dacă $a_{n+1} - a_n = r$, $\forall n \geq 1$ (adică diferența oricăror doi termeni consecutivi este constantă).

Proprietăți

1. $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, $\forall n \geq 1$

2. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \geq 2$.

3. $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + r\dfrac{n(n-1)}{2}$, $\forall n \geq 1$, unde $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

3. Progresii geometrice

Definiție. Şirul de numere reale nenule $(b_n)_{n\geq 1}$ este o *progresie geometrică de rație* q dacă $b_{n+1} = b_n \cdot q$ (adică raportul oricăror doi termeni consecutivi este constant).

Proprietăți

1. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \geq 1$

2. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall n \geq 2$.

3. $S_n = \begin{cases} b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$, unde $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Probleme propuse

1. Să se arate că numerele $\log_2 2$, C_3^1 şi 5 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Variante bacalaureat 2009

2. Să se determine al zecelea termen al şirului 1, 7, 13, 19, ...

Variante bacalaureat 2009

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-1$.

a) Arătaţi că numerele $f(2), f(4)$ şi $f(6)$ sunt în progresie aritmetică.

b) Calculaţi $S=f(0)+f(1)+f(2)+...+f(10)$.

c) Arătaţi că dacă numerele reale a, b şi c sunt în progresie aritmetică, atunci şi $f(a), f(b)$ şi $f(c)$ sunt în progresie aritmetică.

4. Determinaţi $x\in\mathbb{R}$ ştiind că x, $(x-1)^2$ şi $x+2$ sunt în progresie aritmetică.

5. Determinaţi $x\in\mathbb{R}$ pentru care numerele $x-1, x+1$ şi $3x-1$ sunt în progresie aritmetică.

Bacalaureat 2011

6. Să se determine numărul real x ştiind că numerele $x+1$, $1-x$ şi 4 sunt în progresie aritmetică.

7. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_5=7$ şi $a_{23}=43$.

a) Determinaţi a_2.

b) Numărul 2015 este termen al progresiei?

c) Calculaţi suma $T=a_2+a_5+a_8+...+a_{23}$.

8. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2=6$ şi $a_3=5$. Calculaţi a_6.

Bacalaureat 2011

9. Să se calculeze suma primilor 10 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_3-a_2=2$ şi $a_1+a_3+a_5+a_6=30$.

10. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3=5$ şi $a_5=11$. Calculaţi suma primilor şapte termeni ai progresiei.

Bacalaureat 2010

11. Calculaţi sumele.

a) $1+3+5+...+19$.

Variante bacalaureat 2009

b) $2+6+10+...+102$.

c) $1+3+5+...+(2n-1)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

d) $1+5+9+...+(4n-3)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

12. Arătaţi că suma primelor 100 numere naturale impare este un pătrat perfect.

13. Determinați al zecelea termen al șirului $x_1, x_2, 7, 10, 13, \ldots$.

14. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_3 + a_{19} = 10$, să se calculeze $a_6 + a_{16}$.

15. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1 + a_{11} = 8$. Calculați

a) a_6. *b)* $a_1 + a_2 + \ldots + a_{11}$. *c)* $a_2 + a_3 + a_9 + a_{10}$.

16. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1$ și $a_3 = 5$. Determinați n știind că $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 100$.

17. Arătați că dacă numerele reale a, b și c sunt în progresie aritmetică și progresie geometrică, atunci $a=b=c$.

18. Să se determine numărul real a, știind că numerele 2^a, $4^a + 1$ și 2^{a+2} sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Variante bacalaureat 2009.

19. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele 2^{a-1}, $2^{-a+2} + 1$, $2^{a+1} + 1$ să fie în progresie aritmetică.

Variante bacalaureat 2009.

20. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că numerele $2, a, b$ sunt în progresie geometrică și $2, 17, a$ sunt în progresie aritmetică.

Variante bacalaureat 2009.

21. Determinați $x \in \mathbb{R}$ știind că numerele $x, x-1, x+2$ sunt în progresie geometrică.

22. Fie ecuația $x^2 - 4x + a = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2. Determinați $a \in \mathbb{R}^*$ știind că $x_1, x_2, 3x_2$ sunt în progresie geometrică.

23. Fie ecuația $x^2 + ax + 2 = 0$, cu rădăcinile pozitive x_1 și x_2. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că x_1^2, x_2, 1 sunt în progresie geometrică.

24. Determinați primul termen al șirului $a_0, a_1, a_2, 4, 8, 16, 32, \ldots$.

25. Determinați primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \ldots$.

Variante bacalaureat 2009.

26. Arătați că $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} > \frac{2}{3}$.

27. Să se calculeze suma $s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^7$.

28. Să se arate că dacă numerele a, b și c sunt în progresie aritmetică, atunci numerele 2^a, 2^b și 2^c sunt în progresie geometrică.

29. Determinați partea întreagă a numărului $a = 1 + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{5^4}$.

30. Arătați că, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ este adevărată egalitatea

$$\left(1 + x + x^2 + x^3\right)^2 - x^3 = \left(1 + x + x^2\right)\left(1 + x + \ldots + x^4\right).$$

31. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$, astfel încât $b_4 - b_2 = 6$ şi $b_3 - b_1 = 3$.

a) Determinaţi raţia q. ***b)*** Calculaţi S_4.

32. Ştiind că doi termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt $b_1 = 1$ şi $b_5 = 16$, determinaţi termenul b_3.

33. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$. Să se calculeze suma

$$f(3) + f(3^2) + ... + f(3^5).$$

Variante bacalaureat 2009.

34. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$. Calculaţi sumele

$$S_1 = f\left((-3)^0\right) + f\left((-3)^1\right) + f\left((-3)^2\right) + ... + f\left((-3)^{10}\right) \text{ şi}$$

$$S_2 = f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(11).$$

35. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x - 1$. Calculaţi sumele

$$S_1 = f(0) - f(1) + f(2) - f(3),$$

$$S_2 = f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(10) \text{ şi}$$

$$S_3 = f(2^0) + f(2^1) + f(2^2) + f(2^3) + ... + f(2^9).$$

Tema 1.3

Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice.

Fie A și B două mulțimi nevide. Spunem că $f : A \to B$ este o *funcție* dacă fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un unic element $f(x) \in B$.

A se numește *domeniul funcției f*, iar B se numește *codomeniul funcției f*. Două funcții sunt egale dacă au același domeniu, același codomeniu și aceeași lege de definiție.

Graficul funcției $f : A \to B$ este mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$.

Imaginea funcției $f : A \to B$ sau (*mulțimea valorilor funcției f*) este mulțimea

$$\operatorname{Im} f = \{y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Observații. **1.** $M(u,v) \in G_f \Leftrightarrow f(u) = v$.

2. Funcția identică a mulțimii A este $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$, $\forall x \in A$.

1. Operații cu funcții

Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă și funcțiile $f, g : D \to \mathbb{R}$. Atunci:

- *suma* funcțiilor f și g este funcția $f + g : D \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- *produsul* funcțiilor f și g este funcția $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
- dacă $g(x) \neq 0, \forall x \in D$, *câtul* funcțiilor f și g este funcția $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Compunerea funcțiilor. Fie $f : A \to B$ și $g : B \to C$ două funcții. Funcția $g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$, se numește *compunerea* funcțiilor g și f.

Observație. Compunerea funcțiilor este asociativă, dar nu este comutativă.

2. Monotonia funcțiilor

Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă. Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este *monoton (strict) crescătoare* dacă pentru orice $x, y \in D$, $x < y$, avem $f(x) \leq f(y)$ $(f(x) < f(y))$.

Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este *monoton (strict) descrescătoare* dacă $x, y \in D$, $x < y$, avem $f(x) \geq f(y)$ $(f(x) > f(y))$.

Observații.

1. Dacă raportul de variație $R_f(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0, \forall x, y \in D, x \neq y$, atunci funcția f este strict crescătoare, iar dacă $R_f(x,y)<0$, $\forall x \neq y$, atunci f este descrescătoare.

2. Compunerea a două funcții monotone, de aceeaşi monotonie, este o funcție crescătoare; compunerea a două funcții monotone, de monotonii diferite, este o funcție descrescătoare.

3. Funcţii pare, impare, periodice.

Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă centrată în origine ($\forall x \in D \Leftrightarrow -x \in D$).

a. Funcția $f: D \to \mathbb{R}$ este *funcție pară* dacă $f(-x)=f(x), \forall x \in D$.

b. Funcția $f: D \to \mathbb{R}$ este *funcție impară* dacă $f(-x)=-f(x), \forall x \in D$.

Proprietăți

1. Dacă $f: D \to \mathbb{R}$ este o funcție impară şi $0 \in D$, atunci $f(0)=0 \Leftrightarrow O(0,0) \in G_f$.

2. Suma $f+g: D \to \mathbb{R}$ a două funcții pare (impare) $f, g: D \to \mathbb{R}$ este tot o funcție pară (impară).

3. Produsul/câtul a două funcții pare/impare este o funcție pară. Produsul/câtul dintre o funcție pară şi una impară este o funcție impară.

4. Compunerea a două funcții pare/impare este o funcție pară. Compunerea dintre o funcție pară şi una impară este o funcție impară.

Definiție. Funcția $f: D \to \mathbb{R}$ este *periodică cu perioada T* dacă $f(x+T)=f(x)$, pentru orice $x \in D$ pentru care $x+T \in D$. Cea mai mică perioadă pozitivă (dacă există) se numeşte *perioadă principală*.

4. Simetrii ale graficului unei funcţii

Definiție. Dreapta $x=a$ este *axă de simetrie* pentru graficul funcției $f: D \to \mathbb{R}$ dacă $f(a-x)=f(a+x)$, pentru orice $x \in D$ astfel încât $a-x, a+x \in D$.

Punctul $M(a,b) \in xOy$ este *centru de simetrie* pentru graficul funcției $f: D \to \mathbb{R}$ dacă $f(a-x)+f(a+x)=2b$, pentru orice $x \in D$ astfel încât $a-x, a+x \in D$.

Observații. 1. Graficul unei funcții pare este simetric față de axa *Oy*.

2. Graficul unei funcții pare este simetric față de origine.

5. Funcţii injective, surjective, bijective, inversabile

Definiție. Funcția $f: A \to B$ este:

- *injectivă* dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ avem $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *surjectivă* dacă pentru orice $y \in B$, există $x \in A$ astfel încât $f(x)=y$;
- *bijectivă* dacă este injectivă şi surjectivă.

Definiție. Funcția $f: A \to B$ este inversabilă dacă există o funcție $g: B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$. Notăm $g = f^{-1}$ şi spunem că f^{-1} este inversa funcției f.

Observații

1. Funcția $f: A \to B$ este injectivă dacă şi numai dacă este îndeplinită una din condițiile:

a. Pentru orice $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)$, rezultă $x_1 = x_2$.

b. Pentru orice $y \in B$, ecuația $f(x)=y$ are cel mult o soluție $x \in A$.

2. Funcția $f : A \to B$ e surjectivă dacă și numai dacă este îndeplinită una din condițiile:

a. $\operatorname{Im} f = B$.

b. Pentru orice $y \in B$, ecuația $f(x) = y$ are cel puțin o soluție $x \in A$.

3. Funcția $f : A \to B$ este bijectivă dacă oricărui element $y \in B$ îi corespunde un unic element $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$.

4. Funcția $f : A \to B$ este *inversabilă* dacă și numai dacă este *bijectivă*. *Inversa* funcției bijective $f : A \to B$ este funcția $f^{-1} : B \to A$ care îndeplinește proprietatea: $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, unde $x \in A$ și $y \in B$.

Probleme propuse

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x+3|$.

a) Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre graficul funcției *f* și dreapta de ecuație $x = 1$.

b) Calculați $f(-4) + f(2) + f(-6)$.

2. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x-8| + x$ este constantă pe intervalul $(-\infty, 8]$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5 - x$. Calculați $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(10)$.

Bacalaureat 2011

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$. Calculați suma $s = f(-5) + \; + f(-4) + \ldots + f(0) + \ldots + f(5)$.

5. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x} - 5$.

Calculați produsul $p = f(-2012) \cdot f(-2010) \cdot \ldots \cdot f(0) \cdot \ldots \cdot f(2012)$.

6. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + x - 1$. Calculați produsul $P = f\left(\frac{1}{10}\right) \cdot f\left(\frac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{1}\right)$.

7. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + 3$. Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre graficele funcțiilor *f* și *g*.

Bacalaureat 2010

8. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax + 1$ se intersectează într-un punct pe axa Ox.

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{pentru } x \le 1 \\ 2x-1, & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$. Calculați $f(0) + f(2)$.

10. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{pentru } x \le 0 \\ x-1, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$. Calculați $f(f(-1))$.

11. Pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+2$ determinați cel mai mic element al mulțimii $A=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\le 2\}$.

12. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-8x$. Determinați suma elementelor din mulțimea $A=\{a\in\mathbb{R} \mid f(a)=a\}$.

13. Determinați mulțimea valorilor funcției $f:[-1,5]\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+3$.

14. Determinați mulțimea valorilor funcției $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x-1$.

15. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2$. Să se determine mulțimea valorilor funcției *f*.

Variante bacalaureat 2009

16. Se consideră funcția $f:[-2,1]\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2$. Să se determine mulțimea valorilor funcției *f*.

17. Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{pentru } x\le 1\\ 2x-2, & \text{pentru } x>1\end{cases}$.

18. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-1$. Pentru o submulțime A a lui $\mathbb{R}$ definim mulțimea $f^{-1}(A)=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in A\}$. Determinați

a) $f^{-1}(\{1,2\})$. *b)* $f^{-1}((1,+\infty))$. *c)* $f^{-1}([1,3])$.

19. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x+6$ și $\operatorname{Im} f$ imaginea funcției *f*. Arătați că $1\notin \operatorname{Im} f$.

20. Determinați $m,n\in\mathbb{R}$ știind că punctele $A(1,0)$ și $B(0,-1)$ aparțin graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+mx+n$.

21. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-\frac{1}{x}$. Arătați că $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

22. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\left(e^x+e^{-x}\right)+a$ îndeplinește condiția $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

23. Determinați $a+b\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4+ax^3+x^2+bx+1$ îndeplinește condiția $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

24. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Arătați că *f* **nu** este injectivă.

25. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $f(-x)+f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Arătați că originea axelor de coordonate aparține graficului funcției *f*.

26. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$ și $g(x)=ax+b$. Determinați

$a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $(f \circ g)(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$.

27. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Să se determine numerele reale a și b știind că $f(1-x) + f(2x) = x + 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Variante bacalaureat, februarie 2008

28. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Să se determine numerele reale a și b știind că $3f(x) + 2 = 3x + 5,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Variante bacalaureat 2009

29. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. Arătați că $(f \circ f \circ f)(x) = 8x + 7,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

30. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - x + 1$ nu este injectivă.

31. Arătați că funcția $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = 2x + 1$ nu este surjectivă.

32. Determinați inversa funcției bijective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$.

33. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inversa funcției bijective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 3$. Calculați $g(3)$.

34. Se consideră funcția bijectivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 3$ cu inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se calculeze $g(2) + g(-1)$.

Variante bacalaureat, februarie 2008

35. Se consideră o funcție bijectivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $f(1) = 2$. Dacă g este inversa funcției f calculați $g(2)$.

Tema 1.4

Funcția de gradul I. Funcția de gradul al II-lea

1. Funcția de gradul I

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$ (cu $a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$), se numește *funcție de gradul* I.

Graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$ este o dreaptă de pantă a.

Monotonia. Dacă $a>0$, atunci funcția f este strict crescătoare.

Dacă $a<0$, atunci funcția f este strict descrescătoare.

Semnul funcției de gradul I

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

2. Funcția de gradul al II-lea

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$ (cu $a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$), se numește *funcție de gradul* al II-lea.

Forma canonică. $f(x)=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$, unde $\Delta=b^2-4ac$.

Semnul funcției de gradul al doilea

1. $\Delta<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	

2. $\Delta=0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

3. $\Delta>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$\operatorname{sgn}(a)$	0	$-\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$	

Observații

$f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$

$f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$

$f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$

Graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$ este o parabolă de vârf $V\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, axă de simetrie $x=-\dfrac{b}{2a}$, care are ramurile orientate în sus dacă $a>0$ și în jos dacă $a<0$.

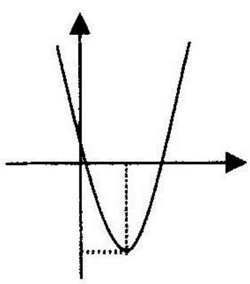
Monotonia și punctele de extrem

1. $a>0$

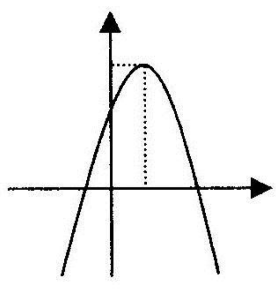
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$

2. $a<0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$



$a>0$



$a<0$

- Dacă $a>0$, $\min f(x)=-\dfrac{\Delta}{4a}$, care se atinge în punctul (de minim) $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Funcţia f este strict crescătoare pe $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ şi strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$.

- Dacă $a<0$, $\max f(x)=-\dfrac{\Delta}{4a}$, care se atinge în punctul (de maxim) $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Funcţia f este strict crescătoare pe $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ şi strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$.

Relaţiile lui Viète. Fie x_1,x_2 rădăcinile ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$. Atunci $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Observaţii.

1. $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$; $\quad x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)$.

2. Ecuaţia de gradul al II-lea cu rădăcinile x_1 şi x_2 este $x^2-sx+p=0$, unde $s=x_1+x_2$ şi $p=x_1\cdot x_2$.

Probleme propuse

1. Să se determine funcţia de gradul I al cărei grafic trece prin punctele $A(1,2)$ şi $B(-1,0)$.

2. Să se determine funcţia de gradul întâi al cărei grafic trece prin punctele $A(1,1)$ şi $B(4,7)$.

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(m^2-4\right)x-3$ să fie strict crescătoare.

4. Se consideră funcţiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_m(x)=\dfrac{m-1}{2m+2}x+3,\ m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

   a) Determinaţi *m* ştiind că funcţia f_m este strict crescătoare.

   b) Determinaţi *m* ştiind că $A(1,0)\in G_{f_m}$.

   c) Determinaţi *m* ştiind că $f_m(1)>f_m(3)$.

   d) Determinaţi *m* ştiind că $f_m(1)=f_m(3)$.

5. Rezolvaţi în mul□imea numerelor reale inecuaţiile.

   a) $\dfrac{1}{x+1}\geq 2$. ***b)*** $\dfrac{1}{x}\leq 1$. ***c)*** $\dfrac{x^2-1}{x}>0$. ***d)*** $(x-2)\left(x^2+2\right)\leq 0$.

6. Determinaţi numerele întregi *x* care verifică relaţia $-2\leq\dfrac{1-x}{3}\leq 1$.

7. Determinați numerele întregi x pentru care $-1 \le \frac{x+1}{3} < 1$.

Bacalaureat 2011, model subiect

8. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - 2m + 2$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să nu intersecteze axa Ox.

Variante bacalaureat 2009

9. Să se determine toate funcțiile de gradul întâi $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strict crescătoare care îndeplinesc condiția $f(f(x)) = 4x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Variante bacalaureat, februarie 2008

10. Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2 + 2x - 8 < 0$.

Bacalaureat 2010

11. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile.

a) $3x^2 - 11x + 6 \le 0$.

Bacalaureat 2011

b) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \le 0$.

c) $(x^2 - 1)(x + 1) \ge 0$.

Variante bacalaureat 2009

d) $(2x-1)(x+1) \le -x + 11$.

Variante bacalaureat 2009

12. Determinați soluțiile întregi ale inecuației $2x^2 - x - 3 \le 0$.

Bacalaureat 2011.

13. Rezolvați în mul□imea numerelor întregi inecuațiile.

a) $(x-1)(x+2) < 0$.

b) $\frac{2}{x-1} \le 1$.

c) $x^4 < 4$.

d) $x^2 - 7x + 10 < 0$.

14. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + ax + 1$ și $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + b$. Determinați numerele reale a și b știind că punctul $A(1,2)$ este comun graficelor funcțiilor f și g.

15. Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

Bacalaureat 2011, model subiect

16. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. Să se determine punctul care are abscisa este egală cu ordonata și aparține graficului funcției f.

Variante bacalaureat 2009

17. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - ax + b$. Determinați $(a+b)^2$ știind că punctul $A(-1,3)$ aparține graficului funcției f.

18. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$. Determinați numerele reale a și b pentru care graficul funcției f conține punctele $A(2,3)$ și $B(-1,0)$.

Bacalaureat 2011

19. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-x+3$. *Bacalaureat 2011*

20. Arătați că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+5$ se află deasupra dreptei $y=1$.

21. Să se determine cel mai mare număr real a, pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2-4x+1$ este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,a]$. *Bacalaureat 2006*

22. Să se determine mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

Bacalaureat 2011 - model subiect

23. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+2x-5$. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care abscisa vârfului parabolei asociate funcției f este egal cu 2. *Bacalaureat 2010*

24. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+m$.

Determinați $m\in\mathbb{R}$ în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) graficele funcțiilor f și g se intersectează pe axa Oy.

b) graficele funcțiilor f și g au un singur punct comun.

c) graficele funcțiilor f și g au două puncte comune.

25. Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+m^2$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

26. Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+m$ se află pe graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2$.

27. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+(2m-1)x+m^2+m$ se află pe dreapta $x=1$.

28. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ știind că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax+b$ este $V(1,2)$.

29. Se consideră funcțiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_m(x)=mx^2-2(m-1)x+m+1,\ m\in\mathbb{R}^*$.

a) Determinați m știind că graficul funcției f_m nu intersectează axa Ox.

b) Determinați mulțimea valorilor funcției f_2.

c) Determinați m știind că $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

30. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $x^2-x+m^2=0$ are două soluții reale egale.

Bacalaureat 2010

31. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-a$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $(f\circ g)(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

32. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3(a-1)x + a - 1$, intersectează axa Ox în două puncte distincte.

33. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a + 1$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Determinați a știind că ecuația $f(x) = 0$ nu are nicio soluție.

b) Determinați a știind că inecuația $f(x) < 0$ nu are nicio soluție.

c) Determinați a știind că graficul funcției f este tangent axei Ox.

34. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (2a-1)x + a^2 + 1$ este egală cu 1.

35. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + m$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care minimul funcției f este egal cu 2. *Bacalaureat 2010*

36. Să se demonstreze că ecuația $x^2 - 2x + 1 + a^2 = 0$ nu admite soluții reale, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$. *Variante bacalaureat 2009*

37. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile x_1 și x_2 ecuației $x^2 + (2m+3)x + m + 1 = 0$ verifică pe rând condițiile.

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$. *b)* $x_1^2 = x_2^2$. *c)* $|x_1 - x_2| = 1$. *d)* $x_1 + 1 = x_2$.

38. Se consideră ecuația $x^2 + x + m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 3$.

39. Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că rădăcinile ecuației $x^2 + 2(m-1)x + m - 1 = 0$ au semne distincte.

40. Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - nx + m = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ are două elemente.

41. Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m + 10 = 0\} \neq \emptyset$.

42. Fie ecuația $x^2 + 2x + a = 0$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Determinați $a \in \mathbb{Z}$ știind că x_1, a, x_2 sunt în progresie aritmetică.

43. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 + x - 1 = 0$. Calculați.

a) $a = \frac{x_1}{x_2^2 + x_2} + \frac{x_2}{x_1^2 + x_1}$. *b)* $b = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2}$.

44. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 + 3x - 1 = 0$. Calculați.

a) $a = \frac{x_1}{x_2^2 + 3x_2} + \frac{x_2}{x_1^2 + 3x_1}$.

b) $b = x_1^2 + x_2^2$.

c) $c = x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2$.